**Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников**

**7 класс.**

**7.1.** После того, как Дима перелил из одного бидона 12,5% находившегося в нём молока в другой, то молока в обоих бидонах стало поровну, по 35 литров. Сколько молока во втором бидоне было изначально?

**Ответ.** 30 литров.

**Решение.** Перелитые 12,5% составляли восьмую часть содержимого первого бидона до переливания, соответственно составляют одну седьмую часть того, что осталось после переливания. Следовательно, Дима перелил во второй бидон 5 литров молока, а было во втором бидоне до переливания 30 литров.

**7.2.** Вася взвешивает на кухне сладости. Оказалось, что три конфеты и два яблока весят столько же, сколько весят четыре бублика и один пряник, а семь конфет и один пряник равны по весу трём яблокам и четырём бубликам. Что тяжелее: пять конфет или четыре бублика?

**Ответ.** Пять конфет.

**Решение.** Пусть **к** — вес конфеты, а **я**, **б**, **п** — веса яблока, бублика и пряника соответственно. Записывая условия задачи, получаем: 3**к** + 2**я** = 4**б** + 1**п**, 7**к** + 1**п** = 3**я** + 4**б**. Сложим их: 10**к** + 2**я** + 1**п** = 8**б** + 3**я** + 1**п**, значит, 10**к** > 8**б** или 5**к** > 4**б**.

**7.3.** Расставьте все натуральные числа от 1 до 8 включительно в некотором порядке по кругу так, чтобы каждое число делилось нацело на разность двух соседних с ним (слева и справа) чисел

**Ответ.** 1, 7, 2, 5, 3, 8, 4,6 .

**Решение.** Сам автор расставил числа так: через одно числа от 1 до 4, чтобы почти все разности соседних равнялись 1 и делили всё подряд, а остальные, поэкспериментировав, рассовал между ними, чтобы выполнилось условие.

**7.4.** Борис хочет раскрасить все точки плоскости в несколько цветов так, чтобы на каждой прямой отсутствовали точки хотя бы одного из использованных им цветов. Какое наименьшее число цветов потребуется Борису?

**Ответ.** 3.

**Решение.** Заметим, что одного или двух цветов Борису не хватит. При раскраске в один цвет любая прямая содержит все цвета. Допустим, что Тому удалось покрасить плоскость в два цвета. Возьмём две точки: одну первого и одну второго цвета, тогда прямая, проходящая через эти точки, будет содержать все цвета, что противоречит условию. Значит, Борису понадобится по крайней мере три цвета. Построим пример для раскраски в три цвета: выберем произвольную точку *M* и покрасим ее в первый цвет, затем выберем прямую *a*, проходящую через *M* и покрасим все её точки кроме *M* во второй цвет и, наконец, все остальные точки плоскости покрасим в третий цвет. Прямая *a* содержит точки только первого и второго цветов, любая прямая параллельная *a* будет содержать точки только третьего цвета, а любая прямая, пересекающая *a*, будет содержать ровно одну точку первого или второго цвета и остальные – третьего.

**7.5.** Найти ближайший после 12 часов момент времени, при котором стрелки часов взаимно перпендикулярны.

**Решение.**

За одну минуту стрелка проходит 1/60 часть полной окружности, а часовая $\frac{1}{12∙60}$ часть. Значит, минутная стрелка обгоняет часовую за одну минуту (после 12) на $\frac{1}{60}-\frac{1}{12∙60}=\frac{11}{720}$ часть окружности, поэтому впервые (после 12) стрелки будут перпендикулярны (т.е. угол между ними будет составлять ¼ окружности) через $\frac{1}{4}:\frac{11}{720}=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$ минуты. Значит, стрелки впервые после 12 будут перпендикулярны в 12 часов 16 минут 21$\frac{4}{11}$ секунд.

**Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников**

**8 класс.**

**8.1.** Из четырех монет одна (фальшивая) отличается по всему от остальных, имеющих одинаковый вес. Как выделить ее двумя взвешиваниями на весах с двумя чашечками без гирь?

Можно ли при этом выяснить, легче ли она остальных?

**Решение.** Положим на чашки по одной монете. Если весы останутся в равновесии, то на чашках лежали одинаковые монеты. Заменим одну из этих монет одной из оставшихся, произведем второе взвешивание. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета – четвертая (оставшаяся; только в том случае мы не будем знать, легче ли она остальных или тяжелее). Если же опустится одна из чашечек, то фальшивая – та монета, которую положили на чашку при втором взвешивании. Если при первом взвешивании весы не будут в равновесии, то одинаковыми будут две оставшиеся; при втором взвешивании заменим одну из ранее взвешивавшихся монет одной из оставшихся одинаковых. Если чашечки будут в равновесии, то оставшееся при первом взвешивании монета фальшивая (если она была легче из первых двух, то фальшивая монета легче. Или аналогично, тяжелее).

**8.2.** Имеется 5 листов бумаги. Некоторые из них порвали на 5 кусков каждый. Некоторые из получившихся кусков снова порвали на 5 частей и т.д. Можно ли, продолжая эту операцию, получить 2013 листочков?

**Ответ:** Можно.

**Решение.** Каждый раз количество листков увеличивается на $4n, где n\in N,$ поэтому мы можем получить числа, представимые в виде $4n+1$. А уравнение 2013 = $4n+1$ имеет решение $n=503$.

**8.3.** Однажды утром навстречу друг другу из Черепаново и Новосибирска одновременно выехали два велосипедиста, каждый из них ехал с постоянной скоростью. В полдень этого дня они встретились и, не останавливаясь, приехали: один — в Новосибирск в 2 часа дня, а другой — в Черепаново в 8 часов вечера. Во сколько часов они выехали в тот день?

**Ответ.** В 8 часов утра.

**Решение.** Пусть от выезда велосипедистов до полудня прошло *x* часов, скорость первого велосипедиста (едущего из Черепаново в Новосибирск) равна *v*1, а скорость второго равна *v*2. Тогда расстояние от Черепаново до места встречи равно *x*·*v*1 = 8·*v*2, а от места встречи до Новосибирска *v*2·*x* = 2·*v*1. Перемножим эти равенства и после сокращения на *v*1·*v*2 получим *x*/2 = 8/*x*, т.е. *x* = 4. Значит, они выехали в 12 – 4 = 8 часов утра.

**8.4.** Группа, в составе которой Петр совершил туристскую поездку состояла из пятнадцати человек. Вернувшись из путешествия Петр рассказал, что каждый участник группы был ранее знаком ровно с пятью другими участниками. Возможно ли это?

**Решение.** Построим схему $G$ знакомств. Если утверждение Петра верно, то каждая из пятнадцати туристов знаком с пятью. То есть $15∙5=75$ знакомств, где в каждом турист участвует дважды. Поэтому число знакомств должно быть 75/2=37,5 , что невозможно, так как это число должно быть целым. Следовательно, утверждение Петра неверно.

**8.5.** Разрежьте фигуру, изображённую справа и состоящую из клеток со стороной 1см, на 5 одинаковых по площади и периметру частей. (можно разрезать не по границам клеток, в решении укажите длины отрезков разрезания)

**Решение.**

Сперва разрежем фигуру так, как показано на рисунке слева (делаем это симметрично), при этом у внешних четырёх фигур площадь равняется 6см2, а периметр – 16см, а у внутренней соответственно 8см2 и 16см. Чтобы уравнять площади всех фигур, сдвинем друг к другу на 0,2см все 4 пары разрезов внутри клеток, как это показано на рисунке справа. Тогда периметры всех пяти фигур останутся равными 16см, а площади будут равны по 6,4см2.



**Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников**

**Кабардино – Балкарской республики по математике 2013-2014 г.г.**

**9 класс**

 ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

**9.1.** Найти все трёхзначные натуральные числа, которые уменьшаются ровно в 7 раз при вычёркивании средней цифры.

**Ответ.** 105.

**Решение.** Пусть искомое число равно , где  - цифры числа. После вычёркивания средней цифры по условию имеем , откуда . Здесь и  делятся на 5, поэтому и  делится на 5. Шесть взаимно просто с пятёркой, значит,  делится на 5, откуда  или . В первом случае , чего быть не может, во втором случае .

**9.2.** Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}x^{3}+y^{3}-z^{3}-xyz+11=0,\\x^{3}-y^{3}+z^{3}-xyz-21=0,\\y^{3}+z^{3}-x^{3}-xyz-3=0.\end{array}\right.$$

**Ответ:** $\left(1; -2;2\right), \left(\frac{5}{\sqrt[3]{13}}; \frac{2}{\sqrt[3]{13}};\frac{6}{\sqrt[3]{13}}\right).$

**Решение:** Складывая уравнения попарно, получим систему

$$\left\{\begin{array}{c}x^{3}=xyz+5,\\y^{3}=xyz-4,\\z^{3}=xyz+12,\end{array}\right.$$

равносильную исходной системе. Перемножим уравнения этой системы и обозначим $t=xyz,$ тогда $t^{3}=\left(t+5\right)\left(t-4\right)\left(t+12\right)=t^{3}+13t^{2}-8t-240, или 13t^{2}-8t-240=0, откуда t\_{1}=-4, t\_{2}=\frac{60}{13}.$

Если $t=-4, то x^{3}=1, y^{3}=-8, z^{3}=8, откуда x\_{1}=1, y\_{1}=-2, z\_{1}=2.$

Если $t=60/13, то $ $x^{3}=\frac{125}{13}, y^{3}=\frac{8}{13}, z^{3}=\frac{216}{13}, откуда \left(x\_{2}=\frac{5}{\sqrt[3]{13}}; y\_{2}=\frac{2}{\sqrt[3]{13}};z\_{2=}\frac{6}{\sqrt[3]{13}}\right).$

**9.3.** Из города в деревню шагал путешественник Борис. Ровно в полдень, когда он прошёл треть пути, вдогонку ему из города выбежал спортсмен Дима, а навстречу ему из деревни вышел Максим. Дима обогнал Бориса в 13 часов и повстречался с Максимом в 13 часов 30 минут. Когда (во сколько часов) встретятся Борис и Максим?

**Ответ.** В 14 часов.

**Решение.** Обозначим расстояние от города до деревни за *S* км, скорости Бориса, Димы и Максима за *x, y* и *z* км в час соответственно. В полдень расстояние между Борисом и Димой было равно  км, а между Димой и Максимом - *S* км. При движении скорости Бориса и Димы вычитаются, а скорости Бориса и Максима, а также Димы и Максима складываются, поэтому , а найти нужно и добавить к 12 часам. Из первых двух уравнений , поэтому время от полудня до встречи Бориса и Максима равно 2 часа, а время встречи: 14 часов.

**9.4. 4.101.**В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ вершины $A, B$ и точка пересечения высот треугольника $E$ лежат на окружности, которая пересекает отрезок $BC$ в точке $D.$ Найти радиус окружности, если $CD=4, BD=5.$

**Ответ:** $\frac{27\sqrt{2}}{8}$**.**

**Решение:** Пусть $BK и AF- $ высоты в треугольнике $ABC$ (см.рис.) и пусть $∠ABK=∠CBK=α,$ тогда $∠FAC=α, ∠DBE=∠DAE=α$ (эти углы опираются на одну и ту же дугу.)

Из равенства прямоугольных треугольников $DAF и CAF $ следует, что $AD=AC.$ Найдем $AC,$ пользуясь тем, что треугольники $ADC и ABC$ подобны. Получим $\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC}, откуда AC^{2}=4∙9, AC=6, sinα=\frac{KC}{BC}=\frac{1}{3}, cosα=\frac{2\sqrt{2}}{3}. $ Пусть $R-$ радиус окружности, тогда $\frac{AD}{sin2α}=2R, где AD=6, sin2α=\frac{4\sqrt{2}}{9},$ поэтому $R=\frac{27\sqrt{2}}{8}.$

**9.5.** Можно ли расставить все натуральные числа

а) от 1 до 12,

б) от 1 до 13 включительно в некотором порядке по кругу так, чтобы каждое число делилось нацело на разность двух соседних с ним (слева и справа) чисел?

**Ответ.** а)да, например: 1,11,2,9,3,8,4,7,5,12,6,10. б) нет.

**Решение.** а) Сам автор расставил числа так: через одно числа от 1 до 6, чтобы почти все разности соседних равнялись 1 и делили всё подряд, а остальные, поэкспериментировав, рассовал между ними, чтобы выполнилось условие.

б) Нечётное число делится только на нечётные числа, поэтому рядом с каждым нечётным на круге слева и справа должны стоять числа разной чётности, иначе их разность окажется чётной и будет делить нечётное число. Следовательно, нечётное число не может стоять одно, или идти в серии из трёх и более нечётных чисел подряд. Значит, все нечётные на кругу должны стоять парами, что невозможно, так как их нечётное количество: 1, 3, 5, 7,9,11 и 13.

**Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников**

**10 класс**

 ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

**10.1.** Найти все трёхзначные натуральные числа, которые уменьшаются ровно в 13 раз при вычёркивании средней цифры.

**Ответ.** 130, 260, 390 и 195.

**Решение.** Пусть искомое число равно , где  - цифры числа. После зачёркивания средней цифры по условию имеем , откуда . Здесь и  делятся на 5, поэтому и  делится на 5. Шесть взаимно просто с пятёркой, значит,  делится на 5, откуда  или . В первом случае , откуда  и  соответственно. Во втором случае , откуда .

**10.2.** Два поезда выехали одновременно с постоянными скоростями в одном направлении из городов А и Б, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию В. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/час, а другой – на 20 км км/час, то они тоже прибыли бы на станцию В одновременно, но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.

**Ответ.** 50 км в час и 40 км в час.

**Решение.** Можно считать, что Б расположен между А и В. Обозначим расстояние от Б до В за *S* км, скорости поездов, вышедших из А и Б — за *x* и *y* км в час соответственно, а время, через которое они прибыли в В — за *t* часов. Предположим сначала, что поезд, вышедший из А, увеличил скорость на 25 км в час, а вышедший из Б — на 20 км в час. Тогда:. Из двух первых уравнений имеем , из первого и третьего , из второго и четвёртого. Подставляем выражения для *x* и *y* в равенство , получаем уравнение , откуда . Тогда *x =* 50 км в час и *y* = 40 км в час.

Разбор второго случая, когда, наоборот, поезд, вышедший из А увеличил скорость на 20 км в час, а вышедший из Б — на 25 км в час, приводит к уравнению , не имеющему решений. Однако в полном решении этот случай должен быть разобран, или доказательно отброшен.

**10.3.** Найдите все решения уравнения  в натуральных числах.

**Ответ.**  или совпадают с любой перестановкой чисел 1,2,4. Всего 7 решений.

**Решение.** Сначала заметим, что, если все переменные не меньше 2 и одно из них больше 2, то равенство невозможно, так как тогда , причём одно из неравенств будет строгим — сложив всё вместе, получили бы . Точно так же невозможен случай, когда все переменные не больше 2, а одно меньше 2. Следовательно, либо они все равны 2, что даёт первое решение, либо одно из них меньше 2, то есть равно 1. Пусть , тогда: , откуда 3. Разлагая 3 на натуральные множители, получаем  или . Случаи  и  разбираются аналогично.

**10.4.** Окружность с центром на диагонали $AC$ параллелограмма $ABCD$ касается прямой $AB$ и проходит через точки $C$ и $D.$ Найти стороны параллелограмма, если его площадь $S=\sqrt{2}$, а $∠BAC=\arcsin(\frac{1}{3}.)$

**Ответ.** $\sqrt{2}$ **и** $\sqrt{3}$

**Решение. 4.93** Пусть $O-$ центр окружности, $R-$ ее радиус; $F-$ основание перпендикуляра, опущенного из точки $O$ на прямую $AB$ (см.рис.); $∠BAC=∠ACD=α$. Тогда $OF=OC=OD=R,$ $sin α=\frac{1}{3}, cos α= \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Если $AB=CD=x, BC=AD=y, S-$ площадь параллелограмма $ABCD,$ то $S=2∙\frac{1}{2}x∙AC sin α= \sqrt{2},$ где

$$x=2OC cosα=2Rcosα, AC=AO+OC=\frac{R}{sinα}+R=4R.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2}=2R cosα∙4Rcosα=\frac{16\sqrt{2}}{9},$$

откуда $R=\frac{3}{4}, x=\sqrt{2.}$

Из $∆ACD$ по теореме косинусов находим

$$y^{2}=9+2-2∙3∙\sqrt{2}∙\frac{2\sqrt{2}}{3}=3,$$

откуда $y=\sqrt{3.}$

**10.5.** Докажите неравенство $-\frac{y}{1+x}$ для всех .

**Доказательство.** Умножив на знаменатели и сократив слева и справа, получим равносильное неравенство:. При  выполняется , поэтому достаточно доказать более сильное, чем исходное, неравенство . Последнее равносильно неравенству , выполненному в силу того, что обе скобки слева отрицательны.

**Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников**

**11 класс**

 ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

**11.1.** Два поезда выехали одновременно с постоянными скоростями в одном направлении из городов А и Б, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию В. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/час, а другой – на 20 км км/час, то они тоже прибыли бы на станцию В одновременно, но на 2 часа раньше. Найти скорости поездов.

**Ответ.** 50 км в час и 40 км в час.

**Решение.** Можно считать, что Б расположен между А и В. Обозначим расстояние от Б до В за *S* км, скорости поездов, вышедших из А и Б — за *x* и *y* км в час соответственно, а время, через которое они прибыли в В — за *t* часов. Предположим сначала, что поезд, вышедший из А, увеличил скорость на 25 км в час, а вышедший из Б — на 20 км в час. Тогда:. Из двух первых уравнений имеем , из первого и третьего , из второго и четвёртого. Подставляем выражения для *x* и *y* в равенство , получаем уравнение , откуда . Тогда *x =* 50 км в час и *y* = 40 км в час.

Разбор второго случая, когда, наоборот, поезд, вышедший из А увеличил скорость на 20 км в час, а вышедший из Б — на 25 км в час, приводит к уравнению , не имеющему решений. Однако в полном решении этот случай должен быть разобран, или доказательно отброшен.

**11.2.** Найдите все решения уравнения  в натуральных числах.

**Ответ.**  или совпадают с любой перестановкой чисел 1,2,4. Всего 7 решений.

**Решение.** Сначала заметим, что, если все переменные не меньше 2 и одно из них больше 2, то равенство невозможно, так как тогда , причём одно из неравенств будет строгим — сложив всё вместе, получили бы . Точно так же невозможен случай, когда все переменные не больше 2, а одно меньше 2. Следовательно, либо они все равны 2, что даёт первое решение, либо одно из них меньше 2, то есть равно 1. Пусть , тогда: , откуда 3. Разлагая 3 на натуральные множители, получаем  или . Случаи  и  разбираются аналогично.

**11.3.** Назовём натуральное число *подходящим*, если его цифры в разрядах единиц, сотен, десятков тысяч и т. д.- нечётны, а цифры в разрядах десятков, тысяч, сотен тысяч и т.д. – чётны. Найдите 2012–ое в порядке возрастания подходящее число.

**Ответ.** 50943.

**Решение.** Отметим, что в каждом разряде подходящего числа, если он не первый, могут стоять 5 цифр, а если первый, то 5, если там находятся нечётные цифры и 4 — если чётные. Тогда аккуратно посчитаем.

а) Допуская в начале двузначного числа 0, получим, что подходящих одно- и двузначных чисел всего .

б) Допуская в начале четырёхзначного числа 0, получим, что подходящих трёх- и четырёхзначных чисел всего .

в) Подходящих пятизначных чисел с первыми цифрами 1 и 3: . Итого уже 1900, и 1900+ 625 > 2012, значит, искомое число пятизначное и начинается на 5.

г) Подходящих пятизначных чисел с первыми двумя цифрами 50: . Но 1900+125=2025 уже больше 2012, поэтому искомое число начинается на 50.

д) Подходящих пятизначных чисел с первыми тремя цифрами 501, 503, 505 и 507 всего , а 1900+100=2000 меньше 2012, поэтому искомое число начинается на 509. Далее, подходящих пятизначных чисел с первыми четырьмя цифрами 5090 и 5092 всего 10, поэтому искомое число начинается на 5094 и является вторым таким по порядку, то есть равно 50943.

**11.4.** Отрезок $AD$ является биссектрисой прямоугольного треугольника $ABC \left(∠C=90^{°}\right).$ Окружность радиуса $\sqrt{15}$ проходит через точки $A, C, D$ и пересекает сторону $AB $в точке $E$ так, что $AE:AB=3:5.$ Найти площадь треугольника $ABC.$

**Ответ.** $S=32.$

**Решение. 4.5**

Поскольку по условию ∠$ACD=\frac{π}{2}, $то $AD-$ диаметр и ∠$AED$=$\frac{π}{2}$ (см. рис.). Так как $AD-$ биссектриса, то треугольники $ACD и AED$ равные. Пусть $AC=3x, $ тогда

$AE=3x, AB=5x, EB=2x, CB=4x$ (по теореме Пифагора). Из подобия треугольника $AB и EDB$ следует, что $\frac{DB}{AB}=\frac{EB}{CB},$ откуда

$$DB=\frac{5}{2}x, CD=\frac{3}{2}x, AD=\sqrt{AC^{2}+CD^{2}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}x=2\sqrt{15}.$$

Значит, $x=\frac{4}{\sqrt{3}},$ а искомая площадь $S=\frac{1}{2}AC∙BC=6x^{2}=32.$

**11.5.** Найти все действительные корни уравнения $\left|2\sqrt{x}+1-x\right|+\left|x-2\sqrt{x}+2\right|=7$.

Ответ: $x=9.$

**Решение:**  Пологая $x-2\sqrt{x}=t, $ получаем уравнение $\left|t+2\right|+\left|t-1\right|=7, $ откуда $t\_{1}=-4, t\_{2}=3.$

Если $t=-4, то x-2\sqrt{x}+4=0. $ Это уравнение не имеет действительных корней.

Если $t=3,$ то $x-2\sqrt{x}$ - 3=0, откуда $x=9.$